

GEOMETRIŠKAI NETIESINIŲ RĖMINIŲ KONSTRUKCIJŲ 2D ELEMENTO  
TANGENTINĖS STANDUMO MATRICOS SUDARYMO YPATUMAIRomanas Karkauskas<sup>1</sup>, Michail Popov<sup>2</sup>

Vilniaus Gedimino technikos universitetas

El. paštas: <sup>1</sup>rokark@st.vgtu.lt; <sup>2</sup>michail.popov@st.vgtu.lt

**Anotacija.** Geometriškai netiesinių konstrukcijų baigtinių elementų metodo tangentinių matricių komponentų analitinės išraiškos nėra išsamiai pateiktos literatūroje. Dažniausiai pateikiamos tik mažų poslinkių standumo matricos. Tad sprendžiant įvairius konstrukcijų analizės bei projektavimo uždavinius ir norint kuo tiksliau aprašyti konstrukcijos tikrąjį įtemptąjį deformuotą būvį, būtina turėti visiškai aprašytą tangentinės matricos analitinę išraišką. Šiame straipsnyje nagrinėjama geometriškai netiesinio 2D rėminio elemento tangentinės standumo matricos sudarymo metodika naudojantis diskretizuoto kūno pilnutinės potencinės energijos stacionarumo sąlygomis vertinant tik tarpelemetines sąveikos jėgas. Gautas vidinių jėgų vektoriaus-funkcijos išvestinė pagal mazginius poslinkius ir yra tangentinė standumo matrica. Pateiktos rėminės konstrukcijos 2D elemento tangentinė standumo matricę sudarančių matricių analitinės išraiškos, išreikštos mazginiais poslinkiais. Siūloma metodika buvo patikrinta atliekant simbolinius skaičiavimus MatLAB skaičiavimo komplekso terpėje. Gauta analitinė tangentinės standumo matricos išraiška.

**Reikšminiai žodžiai:** baigtinių elementų metodas, tangentinė standumo matrica, geometrinis netiesiškumas, rėminis 2D elementas.

## Įvadas

Sprendžiant konstrukcijų projektavimo, analizės, kitus uždavinius, labai svarbu turėti išsamią informaciją apie konstrukcijos elgseną esant visoms galimoms darbo sąlygoms ir bet kokių konstrukcijos egzistavimo periodu. Suprantama, kad tokie uždaviniai negali būti išspręsti statybinės mechanikos tiesinės teorijos metodais, nes konstrukcijos forma keičiasi ir mažų poslinkių principas tampa netinkamas. Būtina pereiti prie daug išsamesnių ir sudėtingesnių netiesinės teorijos apibendrinimų. Reikia atsisakyti skaičiavimo pagal nedeformuotą būvį, kuris toleruoja mažus poslinkius, ir įvertinti konstrukcijos geometrijos pasikeitimo įtaką jos įtempių ir deformacijų būviui.

Siekiant kuo tiksliau aprašyti ir įvertinti konstrukcijos įtemptąjį deformuotą būvį, naudojamas baigtinių elementų metodas (toliau – BEM) (Barauskas *et al.* 2004) – neatsiejama statybinių konstrukcijų uždavinių sprendimo dalis. Įvertinant tikrąjį konstrukcijos darbą, būtina tangentinė standumo matrica.

Šio tyrimų tikslai:

- plėtoti BEM taikymą konstrukcijų tikrojo įtemptojo deformuotojo būvio netiesinei analizei;
- išnagrinėti tangentinės standumo matricos sudarymo ypatumus, atsižvelgiant į vidinių jėgų sukeltus įvairius konstrukcijos elementų pokyčius;

- atlikti simbolinius skaičiavimus tangentinės standumo matricos analitinei išraiškai gauti;
- analitines išraiškas palyginti su pateiktomis literatūroje.

## Tangentinė standumo matrica

Siekiant kuo tiksliau įvertinti konstrukcijos darbą, vertinant geometrinį netiesiškumą būtina spręsti BEM netiesinę lygį (Barauskas *et al.* 2004):

$$[K_{\tau}]\mathbf{u}_e = \mathbf{F}, \quad (1)$$

čia  $[K_{\tau}] = [K_e] + [K_g] + [K_u]$  – konstrukcijos tangentinė standumo matrica;  $[K_e]$  – mažų poslinkių standumo matrica;  $[K_g]$  – geometrinė standumo matrica, rodanti konstrukcijos deformuoto būvio įtaką jos standumui;  $[K_u]$  – pradinių poslinkių standumo matrica.

Aptarkime konstrukcijos standumo matricos sudarymo eigą.

BEM tangentinei standumo matricai sudaryti naudojame pilnutinės diskretizuoto kūno potencinės energijos išraišką (Atkočiūnas, Nagevičius 2004):

$$\Pi = U + \Omega, \quad (2)$$

čia  $U$  – potencinė kūno deformavimo energija (vidinių jėgų potencialas);  $\Omega$  – potencinė išorinių jėgų energija.

Potencinė kūno deformavimo energija išreiškiama taip:

$$U = \sum_{k=1}^s U_k, \quad (3)$$

čia  $s$  – baigtinių elementų skaičius;  $U_k$  – įtempto ir deformuoto baigtinio elemento potencinė energija, kuri išreiškiama taip:

$$U_k = \frac{1}{2} \int_{V_k} \boldsymbol{\varepsilon}_k(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\sigma}_k(\mathbf{x}) dV_k. \quad (4)$$

Išorinių jėgų potenciale  $\Omega$  vertinsime tik išorinių tarpelementinių sąveikos jėgų  $\mathbf{F}'_k$  darbą, atliktą paskirų elementų mazginių taškų poslinkiuose, kuriuos apibūdina vektorius  $\mathbf{u}_k$ :

$$\Omega = \sum_{k=1}^s \Omega_k = - \sum_{k=1}^s \int_{V_k} \mathbf{u}'_k{}^T \mathbf{F}'_k dV_k. \quad (5)$$

Diskretizuoto kūno elemento pilnutinė potencinė energija  $\Pi_k$  bus gauta susumavus paskirų baigtinių elementų vidinių ir išorinių jėgų potencialus (4) ir (5). Tuomet gaunama tokia pilnutinės potencinės energijos išraiška:

$$\Pi_k = \frac{1}{2} \int_{V_k} \boldsymbol{\varepsilon}_k(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\sigma}_k(\mathbf{x}) dV_k - \int_{V_k} \mathbf{u}'_k{}^T \mathbf{F}'_k dV_k. \quad (6)$$

Naudojantis pilnutinės potencinės energijos stacionarumo sąlygomis (Lagranžo variaciniu principu), gaunamos baigtinio elemento pusiausvyros lygtys, parašytos remiantis mazginiais poslinkiais:

$$\frac{\partial \Pi_k}{\partial \mathbf{u}'_k} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}'_k} \left( \frac{1}{2} \int_{V_k} \boldsymbol{\varepsilon}_k(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\sigma}_k(\mathbf{x}) dV_k \right) - \int_{V_k} \mathbf{u}'_k{}^T \mathbf{F}'_k dV_k = 0. \quad (7)$$

Ši lygtis yra baigtinio elemento pusiausvyros netiesinė lygtis, nes ir įtempių funkcija  $\boldsymbol{\sigma}_k(\mathbf{x})$  taip pat yra išreiškiama poslinkiais  $\mathbf{u}'_k$ . Šią lygtį galime rašyti taip:

$$\boldsymbol{\Psi}_k(\mathbf{u}'_k) - \mathbf{F}'_k = 0, \quad (8)$$

čia  $\mathbf{F}'_k$  – elemento mazginių jėgų vektorius;

$$\boldsymbol{\Psi}_k(\mathbf{u}'_k) = \int_{V_k} \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_k(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{u}'_k} \right\}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_k(\mathbf{x}) dV_k. \quad (9)$$

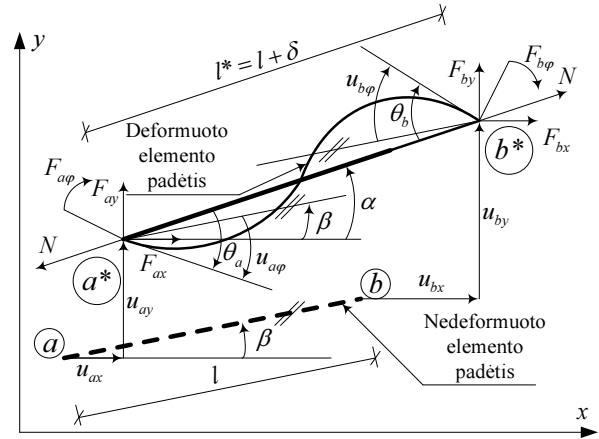
Tai yra elemento vidinių jėgų vektorius, o jo išvestinė:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}_k(\mathbf{u}'_k)}{\partial \mathbf{u}'_k} = [\mathbf{k}_\tau(\mathbf{u}'_k)] \quad (10)$$

yra vadinama baigtinio elemento **tangentine standumo matrica**.

### Rėminis strypinis elementas

Šiame darbe nagrinėjame rėminės konstrukcijos 2D elemento, pavaizduoto 1 pav., tangentinės matricos sudarymo procedūra. Priimame tokias prielaidas: besideformuojant rėmui elemento mazgai gali pasislinkti atstumais gerokai viršijančiais jo matmenis; elemento forma nekinta; elemente vyrauja tempimo ir gniuždymo ir lenkimo įrašos.



1 pav. Rėmo 2D elementas globaliojoje koordinatinių sistemoje  
Fig. 1. 2D frame element in global coordinate system

1 pav. parodyto elemento mazginių jėgų vektorius globalinėje koordinatinių sistemoje turi šiuos komponentus:

$$\mathbf{F}_k = [F_{ax} \quad F_{ay} \quad F_{ap} \quad F_{bx} \quad F_{by} \quad F_{b\phi}]^T.$$

Jam dualus yra elemento taškų poslinkių vektorius:

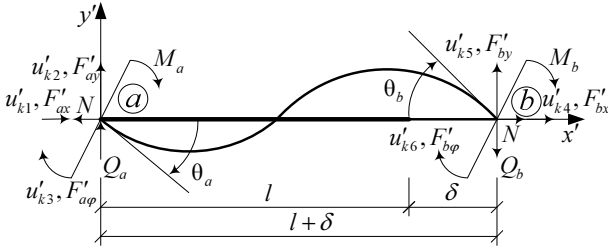
$$\mathbf{u}_k = [u_{ax} \quad u_{ay} \quad u_{ap} \quad u_{bx} \quad u_{by} \quad u_{b\phi}]^T.$$

Atitinkami vektoriai lokaliajoje koordinatinių sistemoje bus  $\mathbf{F}'_k$  ir  $\mathbf{u}'_k$ , kurių komponentų teigiamos kryptys yra parodytos 2 pav. Ten pat parodytos teigiamų krypčių elemento lokalsios įrašos, kurių vektorius:

$$\mathbf{S}_{ab} = [M_a \quad M_b \quad N]^T.$$

Tempimo ir gniuždomo ir kartu lenkiamo elemento mazginių poslinkių vektorius lokaliajoje koordinatinių sistemoje, bus aprašomas elemento galų horizontaliaisiais, vertikalaisiais ir kampiniais poslinkiais (2 pav.), kurių vektorius:

$$\mathbf{u}'_k = [u'_{k1} \ u'_{k2} \ u'_{k3} \ u'_{k4} \ u'_{k5} \ u'_{k6}]^T.$$



2 pav. Elementas lokaliajoje koordinatų sistemoje  
Fig. 2. Element in local coordinate system

Rėminės konstrukcijos elementas lokaliajoje koordinatų sistemoje  $x'0y'$  turi šešis laisvumo laipsnius. Tokio elemento bet kurio taško linijinis poslinkis  $x'$  ašies kryptimi (elemento pailgėjimas ar sutrumpėjimas)  $u'_x(x)$  yra aprašomas tiesine funkcija, o linijinis poslinkis  $y'$  ašies kryptimi  $u'_y(x)$  yra aprašomas netiesine funkcija. Šioms funkcijoms aproksimuoti dažniausiai naudojami Hermito polinomiali. Jų nežinant, bet kurio taško linijinių poslinkių interpoliavimui per elemento mazginius taškus Hermito polinomus galima gauti interpoliacines funkcijas parenkant tam tikro polinomo pavidalu.

Taip elemento bet kurio taško linijinių poslinkių vektorius  $\mathbf{u}'_k(x) = [u'_x(x) \ u'_y(x)]^T$  yra išreiškiamas elemento mazginiais poslinkiais ir užrašomas taip:

$$\mathbf{u}'_k(x) = [N_k(x)] \cdot \mathbf{u}'_k, \quad (11)$$

čia  $[N_k(x)] =$

$$\begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & 0 & N_4(x) & 0 & 0 \\ 0 & N_2(x) & N_3(x) & 0 & N_5(x) & N_6(x) \end{bmatrix}$$

yra vadinama elemento formos funkcijų matrica, kurios nariai yra tokie Hermito polinomiali:

$$\left. \begin{aligned} N_1(x) &= 1 - \frac{x}{l}, & N_2(x) &= 1 - \frac{3}{l^2}x^2 + \frac{2}{l^3}x^3, \\ N_3(x) &= x - \frac{2}{l}x^2 + \frac{1}{l^2}x^3, \\ N_4(x) &= \frac{x}{l}, & N_5(x) &= \frac{3}{l^2}x^2 - \frac{2}{l^3}x^3, \\ N_6(x) &= -\frac{1}{l}x^2 + \frac{1}{l^2}x^3. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

### Deformacijų aproksimacija mazginiais poslinkiais

Nagrinėjame palyginti didelių poslinkių atvejį, kai maksimalaus įlinkio ir skerspjūvio charakteringojo matmens (skerspjūvio aukščio  $h$ ) santykis tenkina šias ribas:

$1/5 \leq u_{\max}/h \leq 5$ . Tuomet deformacijų ir poslinkių ryšys yra netiesinis. Monografijoje (Čyras *et al.* 2004) yra išvestos šio ryšio formulės bet kokios formos erdviniam elementui kreivalinijinėje ortogonalioje koordinatų sistemoje. Jos susieja elemento viduriniojo paviršiaus deformacijos su šio paviršiaus taškų poslinkiais. Jas galima panaudoti ir rėminės konstrukcijos elementui, tarus, kad kreivalinijinės koordinatės sutampa su stačiakampe Dekarto koordinatų sistema, o jas lydinčios pirmos kvadratinės formos koeficientų funkcijos  $A_1 = A_2 = 1$ , o kreivių spinduliai  $R_1 = R_2 = \infty$ . Tuomet strypo ašies išilginė deformacija:

$$\Delta_{11} = \frac{\partial u'_x(x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'_y(x)}{\partial x} \right)^2,$$

o kreivis

$$\kappa_{11} = \frac{\partial^2 u'_y(x)}{\partial x^2}.$$

Elemento skerspjūvio bet kurio taško suminė išilginė deformacija užrašoma taip (Čyras *et al.* 2004):

$$\begin{aligned} \epsilon_k(x) &= \Delta_{11} + y \cdot \kappa_{11} = \\ &= \frac{\partial u'_x(x)}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u'_y(x)}{\partial x} \right)^2 - y \cdot \frac{\partial^2 u'_y(x)}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (13)$$

$y$  – taško atstumas nuo strypo neutraliosios linijos.

Paprastumo dėlei nagrinėjamas strypinis elementas, kurio simetrinio skerspjūvio plotis  $b$ , aukštis  $h$  ir ilgis  $l$ . Tuomet jo vidinių jėgų vektorius (10) yra užrašomas taip:

$$\Psi_k(\mathbf{u}'_k) = b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l \left\{ \frac{\partial \epsilon_k(x)}{\partial \mathbf{u}'_k} \right\}^T \boldsymbol{\sigma}_k(x) dx dy. \quad (14)$$

Vidinių jėgų vektoriaus (14) dešiniąją pusę išreiškiamame elemento mazginių taškų poslinkiais, įrašę į deformacijų išraišką (13) poslinkių aproksimacijos funkcijas (12). Gauname deformacijų funkciją, išreikštą mazginiais poslinkiais:

$$\begin{aligned} \epsilon_k(x) &= \\ &= [C_0] \cdot \mathbf{u}'_k + \frac{1}{2} \mathbf{u}'_k{}^T \cdot [C_3(x)] \cdot \mathbf{u}'_k - y [C_2(x)] \cdot \mathbf{u}'_k, \end{aligned} \quad (15)$$

čia  $[C_0]$  ir  $[C_2(x)]$  ir  $[C_3(x)] = [C_1(x)]^T \cdot [C_1(x)]$  yra koeficientų matricos gaunamos diferencijuojant elemento formos funkcijų matricos  $[N_k(x)]$  tam tikrą eilutę:

$$[C_0] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[C_1(x)] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{6x}{l^2} + \frac{6x^2}{l^3} & -1 + \frac{4x}{l} - \frac{3x^2}{l^2} & 0 & \frac{6x}{l^2} - \frac{6x^2}{l^3} & \frac{2x}{l} - \frac{3x^2}{l^2} \end{bmatrix};$$

$$[C_2(x)] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3} & -\frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2} & 0 & \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} & -\frac{2}{l} + \frac{6x}{l^2} \end{bmatrix}.$$

### Elemento tangentinė standumo matrica

Įrašę (15) išraišką į (14), elemento vidinių jėgų vektorius yra išreiškiamas taip:

$$\begin{aligned} \Psi_k(u) &= b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l [C_0]^T \cdot \sigma_k(x) dx dy + \\ & b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l [C_3(x)]^T \cdot \mathbf{u}'_k \cdot \sigma_k(x) dx dy - \\ & b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l y \cdot [C_2(x)]^T \cdot \sigma_k(x) dx dy. \end{aligned} \quad (16)$$

Naudojant gautą vidinių jėgų vektorių, tangentinė standumo matrica (10) yra tokia:

$$\begin{aligned} [k_\tau(\mathbf{u}'_k)] &= \frac{\partial \Psi_k(\mathbf{u}'_k)}{\partial \mathbf{u}'_k} = \\ & b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l [C_0]^T \cdot \frac{\partial \sigma_k(x)}{\partial \mathbf{u}'_k} dx dy + \\ & b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l [C_3(x)] \cdot \sigma_k(x) dx dy + \\ & b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l [C_3(x)]^T \cdot \mathbf{u}'_k \cdot \frac{\partial \sigma_k(x)}{\partial \mathbf{u}'_k} dx dy + \\ & b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l y \cdot [C_2(x)]^T \cdot \frac{\partial \sigma_k(x)}{\partial \mathbf{u}'_k} dx dy. \end{aligned} \quad (17)$$

Į Huko dėsnį  $\sigma_k(x) = E \cdot \varepsilon_k(x)$  įrašę deformacijų išraišką (15), gauname įtempius mazginiais poslinkiais:

$$\begin{aligned} \sigma_k(x) &= E \cdot [C_0] \cdot \mathbf{u}'_k + \frac{1}{2} \cdot E \cdot \mathbf{u}'_k{}^T [C_3(x)] \cdot \mathbf{u}'_k - \\ & y \cdot E \cdot [C_2(x)] \cdot \mathbf{u}'_k, \end{aligned} \quad (18)$$

čia  $E$  – medžiagos tamprumo modulis.

Skaičiuojame įtempių funkcijos (18) išvestinę:

$$\frac{\partial \sigma_k(x)}{\partial \mathbf{u}'_k} = E \left( [C_0] + \mathbf{u}'_k{}^T \cdot [C_3(x)] - y \cdot [C_2(x)] \right). \quad (19)$$

Įtempius (18) ir jų išvestinę (19) įrašę į (17) ir atlikę diferencijavimą, gauname elemento tangentinę standumo matricą:

$$[k'_\tau] = [k'_e] + [k'_g] + [k'_u], \quad (20)$$

čia

$$\begin{aligned} [k'_e] &= E \cdot b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l [C_0]^T \cdot [C_0] dx dy + \\ & E \cdot b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l y^2 \cdot [C_2(x)]^T \cdot [C_2(x)] dx dy \end{aligned} \quad (21)$$

yra elemento mažų poslinkių standumo matrica;

$$[k'_g] = b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l [C_3(x)] \cdot \sigma_k(x) dx dy \quad (22)$$

yra geometrinė standumo matrica;

$$\begin{aligned} [k'_u] &= E \cdot b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l [C_3(x)]^T \cdot \mathbf{u}'_k \cdot [C_0] dx dy + \\ & E \cdot b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l [C_3(x)]^T \cdot \mathbf{u}'_k \cdot \mathbf{u}'_k{}^T \cdot [C_3(x)] dx dy + \\ & E \cdot b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l [C_0]^T \cdot \mathbf{u}'_k{}^T \cdot [C_3(x)] dx dy \end{aligned} \quad (23)$$

yra pradinių poslinkių standumo matrica.

Į (22) įrašę (18), gauname geometrinę standumo matricą, išreikštą mazginiais poslinkiais:

$$\begin{aligned} [k'_g] &= E \cdot b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l [C_3(x)] \cdot [C_0] \cdot \mathbf{u}'_k dx dy + \\ & \frac{1}{2} \cdot E \cdot b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l [C_3(x)] \cdot \mathbf{u}'_k{}^T \cdot [C_3(x)] \cdot \mathbf{u}'_k dx dy - \\ & E \cdot b \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^l [C_3(x)] \cdot y \cdot [C_2(x)] dx dy. \end{aligned} \quad (24)$$

Gautos išraiškos dešiniojos pusės pirmasis narys sudaro pastoviąją geometrinės standumo matricos, kurią lemia tempimo gniuždymo įtempimai, dalį, antrasis – kintamą, apibrėžiančią lenkimo įtempių įtaką elemento standumui, o trečiasis, atlikus algebrinius veiksmus, yra lygus nuliui.

Transformacija iš lokaliųjų komponentų į globaliuosius yra atliekama įprastu būdu. Tam tikslui lokaliuoje koordinatinių sistemoje sudarome elemento krypties kosinusų matricą  $[T_{ab}]$  ir gauname elemento tangentinę standumo matricą globaliojoje sistemoje:

$$[k_\tau] = [T_{ab}]^T \cdot [k'_\tau] \cdot [T_{ab}]. \quad (25)$$

Tangentinės standumo matricos  $[k_\tau]$  formuojamos kiekvienam elementui; jos vėliau susisieja ir gaunama visos sistemos tangentinė standumo matrica  $[K_\tau]$ , kuri ir naudojama sprendžiant (1) lygtį.

### Simbolinė realizacija MatLAB terpėje

Anksčiau išdėstyta metodika geometriškai netiesinių rėminių konstrukcijų 2D elemento tangentinės matricos analitinei išraiškai gauti buvo patikrinta pritaikius kompiuterinio matematinio MatLAB skaičiavimo komplekso simbolių skaičiavimų paprogramę Symbolic Math Toolbox. Buvo gautos mažų poslinkių, geometrinė ir pradinių poslinkių matricos. Dėl geometrinės ir pradinių poslinkių standumo matricių išraiškų apimties čia pateikta tik gauta mažų poslinkių standumo matricos išraiška:

$$\begin{aligned} Ke = & [A^*E/l \ 0 \ 0 \ -A^*E/l \ 0 \ 0; \\ & 0 \ 12^*I^*E/l^3 \ -6^*I^*E/l^2 \ 0 \ -12^*I^*E/l^3 \ -6^*I^*E/l^2; \\ & 0 \ -6^*I^*E/l^2 \ 4^*I^*E/l \ 0 \ 6^*I^*E/l^2 \ 2^*I^*E/l; \\ & \quad -A^*E/l \ 0 \ 0 \ A^*E/l \ 0 \ 0; \\ & 0 \ -12^*I^*E/l^3 \ 6^*I^*E/l^2 \ 0 \ 12^*I^*E/l^3 \ 6^*I^*E/l^2; \\ & 0 \ -6^*I^*E/l^2 \ 2^*I^*E/l \ 0 \ 6^*I^*E/l^2 \ 4^*I^*E/l]. \end{aligned}$$

Taupydami vietą, pateiksime tik erdvinės santvaros geometriškai netiesinio elemento tangentinės matricos komponentų analitines išraiškas:

mažų poslinkių standumo matricos:

$$Ke = [(A^*E)/l - (A^*E)/l; - (A^*E)/l \ (A^*E)/l];$$

geometrinės standumo matricos:

$$\begin{aligned} Kg = & [- (A^*E^*(uk1 - uk2)^*(2^*l - uk1 + uk2))/(2^*l^3) \\ & (A^*E^*(uk1 - uk2)^*(2^*l - uk1 + uk2))/(2^*l^3); \\ & (A^*E^*(uk1 - uk2)^*(2^*l - uk1 + uk2))/(2^*l^3) \\ & - (A^*E^*(uk1 - uk2)^*(2^*l - uk1 + uk2))/(2^*l^3)]; \end{aligned}$$

ir pradinių poslinkių matricos:

$$\begin{aligned} Ku = & [- (A^*E^*(uk1 - uk2)^*(2^*l - uk1 + uk2))/l^3 \\ & (A^*E^*(uk1 - uk2)^*(2^*l - uk1 + uk2))/l^3; \\ & (A^*E^*(uk1 - uk2)^*(2^*l - uk1 + uk2))/l^3 \\ & - (A^*E^*(uk1 - uk2)^*(2^*l - uk1 + uk2))/l^3]. \end{aligned}$$

Literatūroje dažniausiai pateikiamos tik mažų poslinkių standumo matricos, o geometrinės ir pradinių poslinkių standumo matricių išraiškų nėra. Mažų poslinkių standumo matricių išraiškos, gautos pasitelkus MatLAB matematinį skaičiavimų kompleksą, yra identiškos literatūroje pateiktoms. Tai leidžia teigti, kad ir geometrinės, ir pradinių poslinkių standumo matricių išraiškos yra teisingos.

### Išvados

1. Išplėtotas BEM taikymas konstrukcijų tikrojo įtemptojo deformuotojo būvio netiesinei analizei.
2. Išnagrinėti tangentinės standumo matricos sudarymo ypatumai.
3. Atlikti simboliniai skaičiavimai naudojantis MatLAB matematinį skaičiavimų kompleksu.
4. Gautos analitinės išraiškos palygintos su pateiktomis literatūroje išraiškoms.

### Literatūra

- Atkočiūnas, J.; Nagevičius, J. 2004. *Tamprumo teorijos pagrindai*. Vilnius: Technika. 528 p. ISBN 9986-05-793-0.
- Barauskas, R.; Belevičius, R.; Kačanauskas, R. 2004. *Baigtinių elementų metodo pagrindai*. Vilnius: Technika. 610 p. ISBN 9986-05-792-2.
- Čyras, A.; Borkowski, A.; Karkauskas, R. 2004. *Theory and Methods of Optimization of Rigid-Plastic Systems*. Vilnius: Technika. 354 p. ISBN 9986-05-656-X.

### COMPOSITION FEATURE OF THE ELEMENT TANGENT STIFFNESS MATRIX OF GEOMETRICALLY NONLINEAR 2D FRAME STRUCTURES

R. Karkauskas, M. Popov

#### Summary

The expressions of the finite element method tangent stiffness matrix of geometrically nonlinear constructions are not fully presented in publications. The matrixes of small displacements stiffness are usually presented only. To solve various problems of construction analysis or design and to specify the mode of the real deflection of construction, it is necessary to have a fully described tangent matrix analytical expression. This paper presents a technique of tangent stiffness matrix generation using discrete body total potential energy stationary conditions considering geometrically nonlinear 2D frame element taking account of interelement interaction forces only. The obtained vector-function derivative of internal forces considering nodal displacements is the tangent stiffness matrix. The analytical expressions having nodal displacements of matrixes forming the content of the 2D frame construction element tangent stiffness matrix are presented in the article. The suggested methodology has been checked making symbolical calculations in the medium of MatLAB calculation complex. The analytical expression of the stiffness matrix has been obtained.

**Keywords:** finite element method, tangent stiffness matrix, geometrical nonlinearity, 2D frame element.