ISSN 1392–1541 print
ISSN 1648–3502 online

Geodezija ir kartografija, 2007, XXXIII t., Nr. 3
Geodesy and Cartography, 2007, Vol XXXIII, No 3

UDK 528.14

GEODEZINIŲ TINKLŲ SUDARYMAS KLASIŲ PAVIDALU

Jonas Skeivalas

Geodezijos ir kadastro katedra, Vilniaus Gedimino technikos universitetas, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lietuva, el. paštas: Jonas.Skeivalas@ap.vtu.lt

Įteikta 2007 02 05, priimta 2007 06 29

Santrauka. Nagrinėjama geodezinių tinklų sudarymo klasių pavidalu tikslingumas ir žemesnės klasės tinklų matavimų tikslumo priklausomybė nuo aukštesnės klasės tinklų atitinkamų parametrų tikslumo. Aukštesnės klasės tinklų parametrų klaidų įtaka žemesnių klasių tinklų išmatuotų dydžių tikslumui analizuojama remiantis pradinių duomenų klaidų teorija. Parodyta, kad atitinkamų klasių išmatuotų dydžių klaidų tolerancijų pasikliovimo tikimybės priklauso nuo geodezinių tinklų atitinkamų dydžių standartinių nuokrypių santykio bei taikomo tolerancijų parametro t_α. Pateikiamos geodezinių tinklų atitinkamų dydžių pirmosios ir antrosios rūšies klaidų pasikliovimo, atsižvelgiant į minėtąsias parametrų reikšmes, tikimybės.

Reikšminiai žodžiai: tolerancijos, standartiniai nuokrypiai, pirmosios ir antrosios rūšies klaidos.

1. Įvadas

Geodeziniai tinklai sudaromi klasių pavidalu. Viena pagrindinių funkcinių sąlygų, taikomų aukštesnės klasės tinklams, tai patikima žemesnės klasės tinklų, jungiamų prie aukštesnės klasės tinklų, kokybės kontrolė. Geodezinių tinklų matavimuose išmatuotų dydžių tikslumui įvertinti ir matavimų rezultatams priimti arba brokuoti dažnai taikomi nesąryšiai, apskaičiuoti pagal uždarų poligonų eigas arba pagal eigas tarp aukštesnės klasės tinklo taškų. Kadangi aukštesnės klasės tinklo atitinkamų dydžių ir parametrų reikšmės turi klaidų, nes nustatytos tam tikru tikslumu, tai žemesnių klasių tinklų matavimo duomenų priėmimo arba brokavimo patikimumas priklauso nuo tam tikrų sąlygų. Aprioriškai galima tvirtinti, kad matavimo duomenų priėmimo arba brokavimo patikimumas yra didesnis tuo atveju, kai aukštesnės klasės tinklo dydžiai ir parametrai be klaidų. Aukštesnės klasės tinklo dydžių klaidos turi tą pačią prasmę kaip ir pradinių duomenų klaidos. Todėl geodezinių tinklų, skaidomų klasėmis, analizei galima taikyti pradinių duomenų klaidų teoriją. Dėl aukštesnės klasės tinklo klaidų, taigi pradinių duomenų klaidų, įtakos tam tikra dalis žemesnės klasės tinklų gerų matavimo rezultatų yra brokuojami (pirmosios rūšies klaida) ir kartu tam tikra dalis blogų rezultatų laikomi gerais (antrosios rūšies klaida). Todėl, kontroliuojant matavimo rezultatus, būtina nustatyti priimtinas pirmosios ir antrosios rūšies klaidų rizikos (tikimybės) reikšmes. Tokiai analizei atlikti remsimės teoriniais teiginiais, išdėstytais darbuose [1–3].

2. Teorinės prielaidos

Tolesniuose teoriniuose aiškinimuose darysime prielaidą, kad geodezinių tinklų matavimo rezultatų klaidos yra atsitiktinės, ir jų skirstinys yra normalusis.

Geodezinių tinklų išmatuotų dydžių rezultatų kokybei tikrinti taikoma atitinkamų dydžių funkcinė išraiška, kurios pavidalas priklauso nuo tinklo rūšies. Pavienių dydžių matavimo klaidų įvertinti nėra galimybės. Tuo atveju, kai išmatuotų dydžių funkcijos yra netiesinės, jos yra linearizuojamos skleidžiant eilutėmis. Matavimo rezultatų funkcijų klaidoms kontroliuoti taikoma tolerancija d_φ, nustatoma pagal lygybę

$$d_\varphi = t_\alpha \sigma_\varphi, \tag{1}$$

čia t_α – parametras, kurio reikšmė priklauso nuo taikytos klaidų skirstinio funkcijos ir tikimybės α; σ_φ – atitinkamos išmatuotų dydžių funkcijos standartinis nuokrypis.

Kontroliuojant tolerancija d_φ žemesnių klasių geodezinių tinklų išmatuotų dydžių funkcijų klaidas, laikant aukštesnės klasės tinklo dydžius neklaidingais, funkcijos klaidų priimtinumo sąlyga yra nelygybė

$$\left|\Delta_\varphi\right| \le d_\varphi, \tag{2}$$

o broko požymis –

$$\left|\Delta_\varphi\right| > d_\varphi, \tag{3}$$

čia Δ_φ – matavimo rezultatų funkcijos atsitiktinė klaida.

Tačiau aukštesnės klasės tinklo dydžiuose taip pat yra klaidų, jos turi įtakos žemesnės klasės tinklų išmatuotų dydžių tikslumui. Todėl matavimo rezultatų kokybė kontroliuojama pagal nesąryšį

$$\omega = \Delta_\varphi + \Delta_u, \tag{4}$$

čia Δ_u – pradinių duomenų aukštesnės klasės tinklo atitinkamų dydžių atsitiktinė suminė klaida. Taigi matavimo klaidų pripažinimo tinkamais rezultatais požymis bus ne (2) nelygybė, o nelygybė

$$|\omega| = |\Delta_\varphi + \Delta_u| \le d, \tag{5}$$

o brokavimo požymis –

$$|\omega| > d. \tag{6}$$

Šiose nelygybėse tolerancija d skaičiuojama taip:

$$d = t_\alpha \sigma_\omega, \tag{7}$$

čia $\sigma_\omega^2 = \sigma_\varphi^2 + \sigma_u^2, \sigma_u$ – pradinių duomenų standartinis nuokrypis.

Tikimybė P_g matavimų kontrolės metu gauti gerus matavimo rezultatus, taikant (2) nelygybę, apskaičiuojama taip:

$$P_g = P(-d_\varphi < \Delta_\varphi \le d_\varphi) = \int_{-d_\varphi}^{d_\varphi} f(\Delta_\varphi)\, d\Delta_\varphi, \tag{8}$$

čia $f(\Delta_\varphi)$ – žemesnės klasės tinklo matavimų atsitiktinės klaidos Δ_φ normaliojo skirstinio tankio funkcija.

Tikimybė P_b nustatyti broką yra lygi:

$$P_b = P(-d_\varphi > \Delta_\varphi > d_\varphi) = \int_{-\infty}^{-d_\varphi} f(\Delta_\varphi)\, d\Delta_\varphi + \int_{d}^{\infty} f(\Delta_\varphi)\, d\Delta_\varphi. \tag{9}$$

Tuo atveju, kai žemesnės klasės tinklas remiasi aukštesnės klasės tinklu, pastarųjų lygybių realizuoti praktikoje negalima.

Nustatysime įvykio A_0 tikimybę P_0, kad nesąryšiai ω patektų į ribinių reikšmių sritį, apibrėžtą jų tolerancija d, kai žemesnės klasės tinklo matavimo rezultatų funkcijos atsitiktinės klaidos atitinka savųjų tolerancijų d_φ sąlygas. Galime parašyti šią išraišką:

$$P_0 = \int_{-d_\omega}^{d_\omega} f(\omega)\, d\omega = \int_{-d_\varphi}^{d_\varphi} \int_{-d_u}^{d_u} f(\Delta_\varphi, \Delta_u)\, d\Delta_\varphi\, d\Delta_u, \tag{10}$$

čia $f(\Delta_\varphi, \Delta_u)$ – atsitiktinių klaidų sistemos, $(\Delta_\varphi, \Delta_u)$ – normaliojo skirstinio tikimybių tankio funkcija, $d_u = t_\alpha \sigma_u$.

Lygybę (10) galime parašyti tokiu pavidalu [1, 3]:

$$P_0 = P\{(-d < \omega \le d) \;\; | (-d_\varphi < \Delta_\varphi \le d_\varphi)\} = \int_{-d_\varphi}^{d_\varphi} f(\Delta_\varphi)\, d\Delta_\varphi \int_{-d_u}^{d_u} f(\Delta_u)\, d\Delta_u = \int_{-d_\varphi}^{d_\varphi} f(\Delta_\varphi)\, d\Delta_\varphi \int_{-d-\Delta_\varphi}^{d-\Delta_\varphi} f(\Delta_u)\, d\Delta_u. \tag{11}$$

Pastaroji lygybė gauta remiantis žemesnės klasės tinklų klaidų Δ_φ nepriklausomumu nuo aukštesnės klasės tinklo klaidų Δ_u.

Ši lygybė apibrėžia tikimybę, kad žemesnės klasės tinklo geri matavimų rezultatai bus pripažinti gerais.

Įvykio A_1 tikimybė P_1 nesąryšiui ω nepatekti į pasikliautinąjį intervalą $(-d, d)$, esant sąlygai, kad atsitiktinė klaida Δ_φ atitiks toleranciją d_φ, užrašoma taikant Bayes'o teoremą [1]:

$$P_1 = P\{(-d > \omega > d) \;\; | (-d_\varphi < \Delta_\varphi \le d_\varphi)\} = \left\{ \int_{-\infty}^{-d-\Delta_\varphi} f(\Delta_u)\, d_u + \int_{d-\Delta_\varphi}^{\infty} f(\Delta_u)\, d\Delta_u \right\} \int_{-d_\varphi}^{d_\varphi} f(\Delta_\varphi)\, d\Delta_\varphi. \tag{12}$$

Ši lygybė rodo tikimybę, kad tam tikra dalis žemesnės klasės tinklo gerų matavimo rezultatų bus pripažinti blogais ir brokuojami (pirmosios rūšies klaida).

Įvykio A_2 tikimybė P_2 nesąryšiui ω patekti į pasikliautinąjį intervalą $(-d, d)$, esant sąlygai, kad atsitiktinė klaida Δ_φ neatitiks tolerancijos d_φ, išreiškiama lygybe

$$P_2 = P\{(-d < \omega \le d) \;\; | (-d_\varphi > \Delta_\varphi > d_\varphi)\} = \int_{-d-\Delta_\varphi}^{-d-\Delta_\varphi} f(\Delta_u)\, d\Delta_u \left\{ \int_{-\infty}^{-d_\varphi} f(\Delta_u)\, d\Delta_u + \int_{d}^{\infty} f(\Delta_\varphi)\, d\Delta_\varphi \right\}. \tag{13}$$

Pastaroji lygybė apibrėžia tikimybę, kad tam tikra dalis žemesnės klasės tinklo blogų matavimo rezultatų bus pripažinta gerais (antrosios rūšies klaida).

Tikimybėms P_0, P_1 ir P_2 skaičiuoti taikyta skaitinis integravimas esant atsitiktinių klaidų Δ_φ ir Δ_u normaliajam skirstiniui. Skaičiavimų rezultatai, kai parametro t_α ir koeficiento $k = \sigma_\varphi / \sigma_u$ reikšmės įvairios, pateikti lentelėje procentais. Tikimybė P_0 apibrėžia tikimybę tokio įvykio, kai tinkami žemesnės klasės tinklo matavimų rezultatai nebus brokuojami taikant nesąryšius ω. Tikimybė P_1 – tai tinkamų matavimo rezultatų brokavimo tikimybė (pirmosios rūšies klaida), o tikimybė P_2 – tikimybė priimti brokuotą matavimo rezultatą kaip tinkamą (antrosios rūšies klaida).

Pateiktos formulės ir skaičiavimų rezultatai rodo, kad žemesnės klasės tinklų matavimo rezultatų klaidų Δ_φ nustatymo pagal nesąryšius ω tikimybė priklauso nuo koeficiento k reikšmės bei nuo parametro t_α reikšmės, o pastaroji nuo taikomų klaidų skirstinio ir atitinkamos tikimybės, taikomos tolerancijų skaičiavimuose. Koeficientas k apibrėžia žemesnės ir aukštesnės klasių tinklų išmatuotųjų dydžių standartinių nuokrypių, t. y. jų tikslumo, santykį.

Tikimybių priklausomybė nuo parametro t_α ir koeficiento k

k	$t_\alpha = 1(\alpha = 68{,}27\,\%)$			$t_\alpha = 2(\alpha = 95{,}45\,\%)$			$t_\alpha = 3(\alpha = 99{,}73\,\%)$		
	P_0	P_1	P_2	P_0	P_1	P_2	P_0	P_1	P_2
1,0	55,0	25,3	12,7	93,0	9,8	1,7	99,0	3,3	0,2
1,5	60,0	17,1	8,2	94,0	6,5	1,4	99,1	1,1	0,1
2,0	65,0	12,3	7,0	95,0	4,1	1,2	99,2	0,6	0,1
2,5	70,0	9,4	6,0	96,0	2,9	1,1	99,3	0,4	0,1
3,0	75,0	7,7	5,2	97,0	2,2	1,0	99,4	0,3	0,1
3,5	80,0	6,5	4,6	97,5	1,8	0,9	99,5	0,2	0,1
4,0	85,0	5,6	4,3	98,0	1,5	0,8	99,6	0,2	0,05

3. Išvados

1. Žemesnės klasės tinklų, kurie remiasi aukštesnės klasės tinklu, išmatuotų dydžių klaidos priklauso nuo aukštesnės klasės tinklų tikslumo, t. y. nuo pradinių duomenų klaidų.

2. Žemesnės klasės tinklų matavimo rezultatų priėmimo arba brokavimo tikimybė priklauso nuo nusistatytosios tolerancijos d_φ parametro t_α reikšmių bei nuo koeficiento $k=\sigma_\varphi/\sigma_u$, apibrėžiančio žemesnės klasės tinklų ir pradinių duomenų klaidų standartinių nuokrypių santykį, t. y. nuo atitinkamų tinklų tarpusavio tikslumo.

3. Optimalus matavimų variantas, kai koeficiento k reikšmė yra intervale $k = 3 - 4$, nes šiuo atveju esant $t_\alpha = 2$ nebrokuojama 97 % ar 98 % gerų matavimo rezultatų, o kai $t_\alpha = 3$, – 99,5 %.

Literatūra

1. KOCH, K. R. *Einführung in die Bayes-Statistik*. Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 2000. 225 S.
2. KOCH, K. R. Räumliche Helmert-Transformation variabler Koordinaten im Gauss-Helmert und im Gauss-Markoff Model. *Z. f. Vermessungswesen*, 2002, No 3. Stuttgart: Verlag K. Witwer, S. 147–152.
3. SKEIVALAS, J. *Treatment of correlated geodetic measurements.* (Koreliuotų geodezinių matavimų rezultatų matematinis apdorojimas). Vilnius: Technika, 1995. 272 p. (in Lithuanian).

Jonas SKEIVALAS. Prof, Doctor Habil. Vilnius Gediminas Technical University. Dept of Geodesy and Cadastre, Saulėtekio al. 11, LT-10223 Vilnius, Lithuania. Ph +370 5 2744 703, Fax +370 5 2744 705, e-mail: jonas.skeivalas@ap.vtu.lt.

Author of two monographs and more than 130 scientific papers. Participated in many intern conferences and research visits to the Finish Geodetic Institute.

Research interests: processing of measurements with respect to tolerances, adjustment of geodetic networks.